

Concursul MateInfoUB 2024 - 18 mai 2024 -

Problema 1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$; spunem că A e *mărginită* dacă există un număr real pozitiv C astfel încât $\max\{|a_n|, |b_n|, |c_n|, |d_n|\} < C$ pentru orice număr natural nenul n , unde

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

- a) Dacă A e mărginită arătați că A^2 e mărginită.
- b) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $\det(A) = 0$; arătați că există $\lambda \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^2 = \lambda A$. Arătați că dacă, în plus, A e mărginită atunci $A^{n+2} = A^n$ pentru orice $n \geq 2$.
- c) Fie $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $\det(B) \neq 0$. Arătați că B este mărginită dacă și numai dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $B^n = I_2$ (unde I_2 este matricea identitate).
- d) Demonstrați că, dacă $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este o matrice mărginită, atunci mulțimea $\{D^n | n \in \mathbb{N}^*\}$ are cel mult 6 elemente.

Barem de punctaj pentru Problema 1:

din oficiu	10p
a) Șirurile $\{ a_{2n} , b_{2n} , c_{2n} , d_{2n} \}$ sunt subșiruri respectiv ale șirurilor $\{ a_n , b_n , c_n , d_n \}$	10p
Finalizare	10p
b) Demonstrează existența lui λ (de exemplu, utilizând teorema Cayley-Hamilton)	10p
A mărginită $\Rightarrow \lambda \in \{0, -1, 1\}$	10p
Finalizare	10p
c) Justifică implicația directă	15p
Justifică implicația inversă	5p
d) Justificarea în cazul $\det(D) = 0$	5p
Determinarea posibیلilor coeficienți ai polinomului caracteristic	10p
Finalizare	5p

Problema 2. Considerăm mulțimile

$\mathcal{M} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă, } f'' \text{ continuă și } f'(0) = f'(1) = f(0) = 0, f(1) = 1\},$

$$\mathcal{N} = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ continuă, } \int_0^1 g(x)dx = 0, \int_0^1 xg(x)dx = 1\}.$$

a) Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ și $g_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g_0(x) = ax + b$. Determinați a și b astfel încât $g_0 \in \mathcal{N}$.

b) Demonstrați că pentru orice $g \in \mathcal{N}$, funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x (t - x)g(t)dt$, aparține lui $\mathcal{M}$.

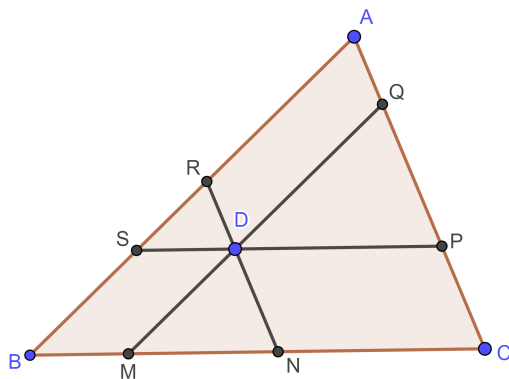
c) Fie $f \in \mathcal{M}$ și $k > 0$ astfel încât $|f''(x)| \leq k$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Arătați că pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $|f'(x)| \leq k \min\{x, 1 - x\}$ și apoi, utilizând eventual această inegalitate, demonstrați că $|f(x)| \leq \frac{k}{4}$.

d) Demonstrați că pentru orice $f \in \mathcal{M}$ și $g \in \mathcal{N}$ există $x_0, y_0 \in [0, 1]$ astfel încât $|f''(x_0)| \geq 4$ și $|g(y_0)| \geq 4$.

Barem de punctaj pentru Problema 2:

din oficiu	10p
a) Determinarea condițiilor pentru a și b astfel încât $g_0 \in \mathcal{N}$	10p
Determinarea a și b	10p
b) Demonstrarea faptului că f e derivabilă și calculul lui f'	10p
Demonstrarea faptului că f e de două ori derivabilă și calculul lui f''	10p
Verificarea celorlalte condiții	10p
c) Demonstrarea primei inegalități	10p
Demonstrarea celei de-a doua inegalități	10p
d) Justificarea existenței lui x_0 ca în enunț	10p
Justificarea existenței lui y_0 ca în enunț	10p

Problema 3. În interiorul triunghiului ABC se alege la întâmplare punctul D . Paralelele duse prin D la BC , CA , respectiv AB intersectează laturile triunghiului în punctele P și S , N și R , respectiv M și Q (unde $M, N \in BC$; $P, Q \in AC$; $R, S \in AB$).



Demonstrați că:

- suma perimetrelor triunghiurilor DMN , DPQ și DRS este egală cu perimetrul triunghiului ABC ;
- dacă D este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci el este centru de greutate și al triunghiului MPR ;
- dacă triunghiurile MPR și SNQ au același centru de greutate, atunci acesta coincide cu D ;
- suma ariilor triunghiurilor DMN , DPQ și DRS este cel puțin o treime din aria triunghiului ABC , iar aria triunghiului MPR este cel mult egală cu o treime din aria triunghiului ABC .

Barem de punctaj pentru Problema 3:

- | | |
|--|-----|
| din oficiu | 10p |
| | |
| a) Identificarea tuturor congruențelor de tipul : $SD = BM$ | 10p |
| Finalizare | 10p |
| | |
| b) Caracterizarea vectorială a centrului de greutate | 10p |
| Finalizare: D este centrul de greutate al triunghiului MPR | 10p |
| | |
| c) Scrierea unei relații vectoriale în care apare centrul comun de greutate G și punctul D | 10p |
| Finalizare $D = G$ | 10p |
| | |
| d) Justificarea faptului că triunghiurile DMN , QDP , RSD , ABC sunt asemenea și utilizarea relației: raportul ariilor este egal cu pătratul raportului de asemănare | 10p |
| Utilizarea unei inegalități de tipul: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ și obținerea concluziei despre suma ariilor | 10p |
| Descompunerea triunghiului MPR în trei triunghiuri cu un vârf în D și obținerea concluziei despre aria triunghiului MPR | 10p |